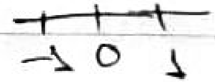
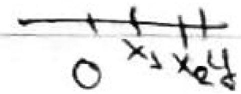
Παρατήρηση Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \geq 0$, $y \geq 1$ τότε $x \cdot y \geq x$, γιατί $xy - x = x(y-1) \geq 0$ ως γινόμενο μη αρνητικών αριθμών. Άρα έστω πόρισμα ως $a, k \in \mathbb{Z}$ με $a \geq 0$ κ' $k \geq 0$ κ' $k \neq 0$ τότε $ak \geq a$ (γιατί $k \geq 1$)



Παρατήρηση Έστω $x_1, x_2, y \in \mathbb{R}$ με $y > 0$ κ' $x_1, x_2 \in [0, y]$. Τότε $|x_2 - x_1| \in [0, y]$



Απόδειξη: Έστω $x_1 \leq x_2$. Τότε $0 = x_1 - x_1 \leq x_2 - x_1 \leq x_2 \leq y$

Παρόμοια απόδειξη αν $x_2 \leq x_1$

Θεώρημα: Έστω $a, b \in \mathbb{Z}$ με $b \neq 0$. Τότε ∃ μοναδικά $q, r \in \mathbb{Z}$ ώστε

$$a = qb + r$$

κ' $0 \leq r \leq |b| - 1$

Το q λέγεται πηλίκο κ' το r υπόλοιπο της ευκλείδειας διαίρεσης του a με το b

Απόδειξη: ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑ

Έστω $q, q', r, r' \in \mathbb{Z}$ με $\overbrace{a = qb + r \text{ με } 0 \leq r \leq |b| - 1 \text{ κ' } a = q'b + r' \text{ κ' } 0 \leq r' \leq |b|}^{**}$

Άρα $qb + r = q'b + r' \Rightarrow (q - q')b = r' - r \Rightarrow |(q - q')b| = |r' - r| \Rightarrow |b||q - q'| = |r' - r|$ (*)

Αν $r = r'$, αφού $b \neq 0$ η (*) δίνει $q = q'$

Υποθέτουμε $r \neq r'$ κ' θα βρούμε αντίφαση. Αφού $r \neq r'$ η (*) δίνει $q \neq q'$. Άρα από τις παρατηρήσεις $|r' - r| = |b||q - q'| \geq |b|$ κ' $|r' - r| \leq |b| - 1$ αντίφαση

από (**)

Απόδειξη ΥΠΑΡΞΗ q, r

Θέτω $A = \{a - kb : k \in \mathbb{Z}\}$ κ' $B = \{\ell \in A : \ell \geq 0\}$

Αν $b \geq 0$ για $k < 0$ (αρνητικό) κ' $|k|$ μεγάλο, το $a + kb \geq 0$. Αν $b < 0$ για $k > 0$ (θετικό) με $|k|$ μεγάλο $a - kb \geq 0$. Συνεπώς $B \neq \emptyset$

Άρα από πρόταση, αφού B είναι μη κενό φραγμένο κάτω (από το 0) υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ έχει ελάχιστο στοιχείο έστω r. Συνεπώς $\exists q \in \mathbb{Z}$ με $a = qb + r$. Αφού $r \in B$ έχουμε $r \geq 0$. Υποθέτουμε $r \geq |b|$. Τότε $r - b$ ή $r + b \in B$ κ' είναι μικρότερο του r αντίφαση στην επιλογή του r. Συνεπώς $0 \leq r \leq |b| - 1$

Παράδειγμα 3 σελ 5

$a = 352, b = 7$. Έχουμε $352 = 50 \cdot 7 + 2$ (*). Αφού $0 \leq 2 \leq 6 = 7 - 1$

$q = 50, r = 2$

$$\begin{array}{r|l} 352 & 7 \\ -35 & \overline{50} \\ \hline 2 & \end{array}$$

$a = 352, b = -7$ (*) $\Rightarrow 352 = (-50)(-7) + 2$.

Άρα $q = -50, r = 2$

γιατί $0 \le 2 \le 6 = |b|-1$

$a=-352,\ b=7$

$(*) \Rightarrow -352 = -50\cdot 7 - 2 = (-50)\cdot 7 - 2$

$(-50)\cdot 7 - 7 + 50 - 2 = (-51)7 + 5$

Άρα $q=-51,\ r=5$

$a=-352,\ b=-7$

$(*) \Rightarrow -352 = -50\cdot 7 - 2 = 50(-7) - 2 = 50(-7) + (-7) - (-7) - 2 = 51(-7) + 5$

Άρα $q=51,\ r=5$

ΤΟ n-ΑΔΙΚΟ ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΜΗ ΑΡΝΗΤΙΚΟΥ ΑΚΕΡΑΙΟΥ

Παρατήρηση: $2019 = 2\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 1\cdot 10^1 + 9$.

Ορισμός: Έστω $n \ge 2$ ακέραιος κ' $a_0, a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{Z}$ με $0 \le a_i \le n-1$, $\forall i$. Θέτουμε $(a_s, a_{s-1}, a_{s-2}, \dots, a_1, a_0)_n = a_0 = a_1 n + a_2 n^2 + a_3 n^3 + \dots + a_s n^s \in \mathbb{Z}$

π.χ. $(3,5,1)_{10} = 1 + 5\cdot 10 + 3\cdot 10^2 = 351$

$(2,3,4)_7 = 4 + 3\cdot 7 + 2\cdot 7^2 = 4 + 21 + 98 = 123$

$(1,00,10)_2 = 0 + 1\cdot 2 + 0\cdot 2^2 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^4 = 2 + 16 = 18$

Προσοχή: τα a_i πρέπει να ικανοποιούν $0 \le a_i \le n-1$

π.χ. $(11,10)_{12} = 10 + 11\cdot 12 = \dots$

Θεώρημα (n-αδικό ανάπτυγμα)

Έστω $n \ge 2$ ακέραιος κ' $k \ge 1$ ακέραιος. Τότε $\exists$ μοναδικό $s \ge 0$ ακέραιος κ' $a_0, \dots, a_s$ ακέραιοι με $0 \le a_i \le n-1$ $\forall i$ κ' $a_s \ne 0$, ώστε $k = (a_s, a_{s-1}, \dots, a_1, a_0)_n$

Η έκφραση λέγεται n-αδικό ανάπτυγμα του k

Απόδειξη: Ύπαρξη: Αλγόριθμος εύρεσης $s, a_0, \ldots, a_s$ (θα γίνει αμέσως μετά)

Μοναδικότητα: Η απόδειξη ανάγεται στην μοναδικότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης (Είναι κάπως περίπλοκο, δεν θα την κάνουμε)

ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

Βήμα 1ο: Αφού $u \geq 2$, $\lim_{x \to +\infty} u^x = +\infty$. Συνεπώς $\exists$ μέγιστος ακέραιος $s \geq 0$ ώστε $u^s \leq k$ (και $u^{s+1} > k$)

Βήμα 2ο Εκτελούμε Ευκλείδεια διαίρεση του k με u^s. Θέτουμε a_s το πηλίκο της διαίρεσης και k' το υπόλοιπο. Αφού $u^{s+1} > k$, έχουμε $0 \leq a_s \leq u-1$

Βήμα 3ο Επιστρέφουμε στο Βήμα 1ο με το k' αντί για το k αν $k' \neq 0$.

Η διαδικασία σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων δίνει $k'=0$, οπότε ο αλγόριθμος τελειώνει

Φυλλάδιο 3 άσκ 9

$u=2, k=100$

Βήμα 1ο: Υπολογίζουμε τη μέγιστη δύναμη 2^s με $2^s \leq 100$. Έχουμε $2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, 2^4=16, 2^5=32, 2^6=64, 2^7=128$

Συνεπώς $s=6$ κ' αναζητούμε $a_0, a_1, \ldots, a_6$ με $100=(a_6, a_5, a_4, a_3, a_2, a_1, a_0)_2$

Βήμα 2ο Ευκλείδεια διαίρεση του 100 με το 2^6

$100 = 1 \cdot 2^6 + 36$ Συνεπώς $a_6 = 1$

το πηλίκο της Ευκλείδειας διαίρεσης

Υπολογίζουμε a_5 ως το πηλίκο της Ευκλείδειας διαίρεσης του 36 με το 2^5

$36 = 1 \cdot 2^5 + 4$ Συνεπώς $a_5 = 1$

Υπολογισμός a_4: Αφού $4<2^4$ έχουμε $a_4=0$

Υπολογισμός a_3: Αφού $4<2^3=8$ έχουμε $a_3=0$

Υπολογισμός a_2: Αφού $4 \leq 2^2$ τότε έχουμε $a_2=1$

Αφού το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης είναι το 0 έπεται $a_1=0$ κ' $a_0=0$.
Άρα $100=(1,1,0,0,1,0,0)_2$

$n=3$, $k=100$

Βήμα 1ο: Υπολογίζουμε τη μέγιστη δύναμη 3^s με $3^s \leq 100$.
Έχουμε $3^1=3$, $3^2=9$, $3^3=27$, $3^4=81$, $3^5>100$.

Συνεπώς $s=4$ κ' αναζητούμε $a_0, a_1, \dots, a_4$ με $100=(a_4,a_3,a_2,a_1,a_0)_3$

Βήμα 2ο: Ευκλείδεια διαίρεση του 100 με το 3^4

$$100 = 1\cdot 3^4+19$$

Συνεπώς $a_4=1$
Το πηλίκο της Ευκλείδειας διαίρεσης

Υπολογισμός a_3:
Αφού $19<3^3$ έχουμε $a_3=0$

Υπολογισμός a_2 Ευκλείδεια διαίρεση του 19 με το $3^2=9$
$19=2\cdot 9+1$ άρα $a_2=2$

Υπολογισμός a_1: Αφού $1<3$ έχουμε $a_1=0$

Υπολογισμός a_0: Φανερά $a_0=1$

Άρα $100=(1,0,2,0,1)_3$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν $n=10$, έχουμε το 10-αδικό ανάπτυγμα.
Για π.χ $350019=(3,5,0,0,1,9)_{10}$

ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑ ΑΚΕΡΑΙΩΝ

Έστω $a,b\in\mathbb{Z}$. Λέμε ότι το b διαιρεί τον a κ' γράφουμε $b|a$ αν $\exists x\in\mathbb{Z}$ τ.ω $a=xb$

Αν το b <u>δεν</u> διαιρεί το a γράφουμε $b\nmid a$

π.χ $2|14$, $2\nmid 5$, $3|27$, $3|12$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Έστω $a,b\in\mathbb{Z}$ με $b\neq 0$
Έστω q το πηλίκο κι r το υπόλοιπο της Ευκλείδειας διαίρεσης του a με το b. Άρα $a=qb+r$ με $0\le r\le |b|-1$. Από τη μοναδικότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης έχουμε ότι $b|a$ αν-ν $r=0$.

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΔΙΑΙΡΕΤΟΤΗΤΑΣ

Έστω a θετικός ακέραιος με $a=(a_s,a_{s-1},\dots,a_1,a_0)_{10}$ η γραφή του a στο δεκαδικό σύστημα. Τότε:
(i) $2|a$ αν-ν $a_0\in\{0,2,4,6,8\}$
(ii) $5|a$ αν-ν $a_0\in\{0,5\}$
(iii) $10|a$ αν-ν $a_0=0$
(iv) $3|a$ αν-ν $3|(a_0+a_1+\dots+a_s)$
(v) $11|a$ αν-ν $11|a_0-a_1+a_2-a_3+\dots$